Donc

$$I_n = \int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^2}\,du$$

3-/On considère la suite $(u_n)_n$ définie sur **IN** par $u_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$.

a-) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+4}}{1+t^2}\,dt - \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t^{2n+4}}{1+t^2} - \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\left(t^2-1\right)\,dt$$

$\forall\ 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t^2 \leq 1$

Donc $t^2 - 1 \leq 0$

et par suite $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \geqslant 0$

Donc $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\left(t^2-1\right) \leqslant 0$